



ce
pre
UNI

Física

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2023-1





ce
pre
UNI

Física

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



ce
pre
UNI

CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. Es un movimiento rectilíneo.
2. Es un movimiento oscilatorio.

Ciertos cuerpos presentan una **posición** donde la **fuerza resultante es cero** llamada **posición de equilibrio (P.E.)**. Al salir de dicha posición el cuerpo comenzará un movimiento de ida y vuelta alrededor de la P.E.

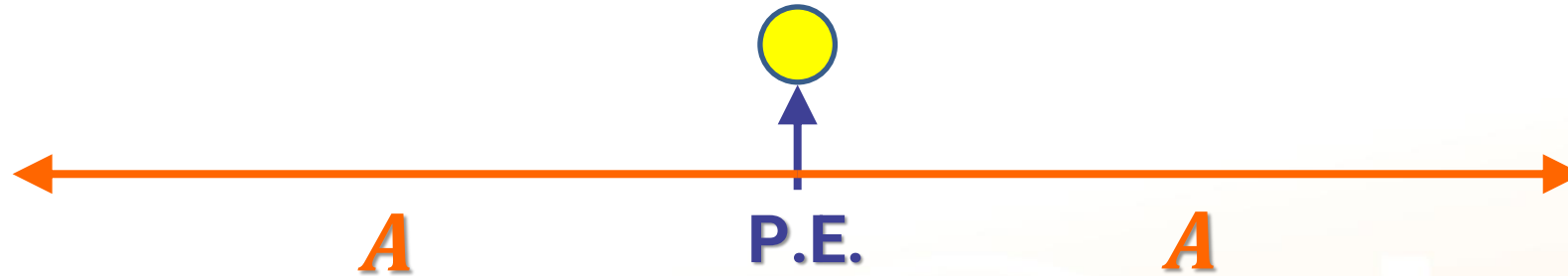
Al realizar una ida y vuelta completa , realiza una **oscilación**



Posición de equilibrio: aquí $\vec{F}_{\text{Resultante}} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

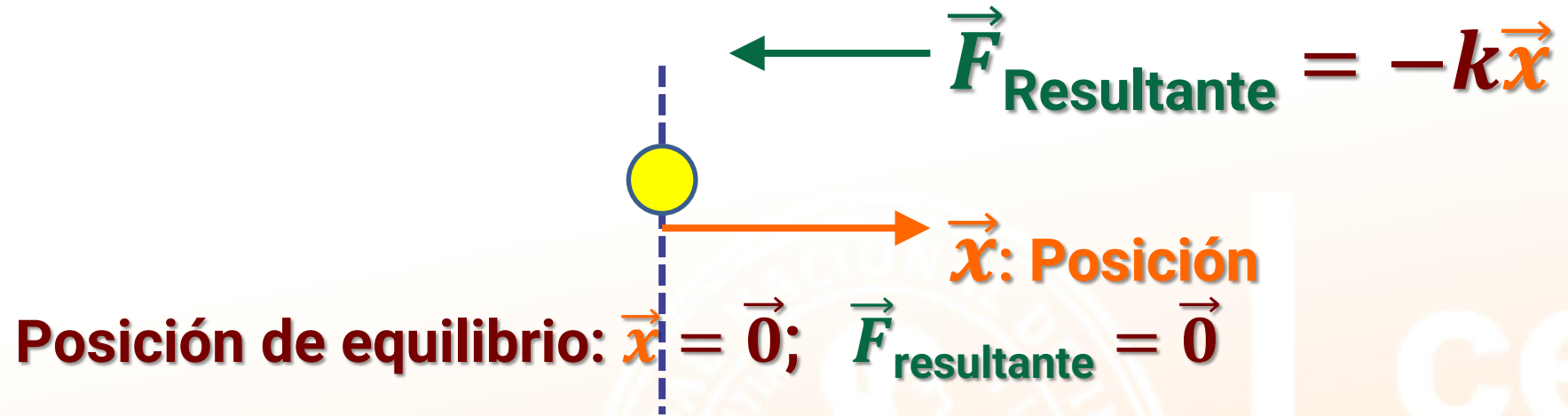


Experimentalmente la posición de equilibrio se encuentra el punto medio de la trayectoria limitada por los extremos. Por lo que la distancia entre la P.E. y un extremo es la máxima distancia que partícula se aleja de la P.E.

A esta distancia se le llama **amplitud** (A).

En una oscilación completa, el desplazamiento es cero y la longitud recorrida $4A$.

3. La fuerza resultante es opuesta y D.P. a la posición de la partícula medida desde la posición de equilibrio

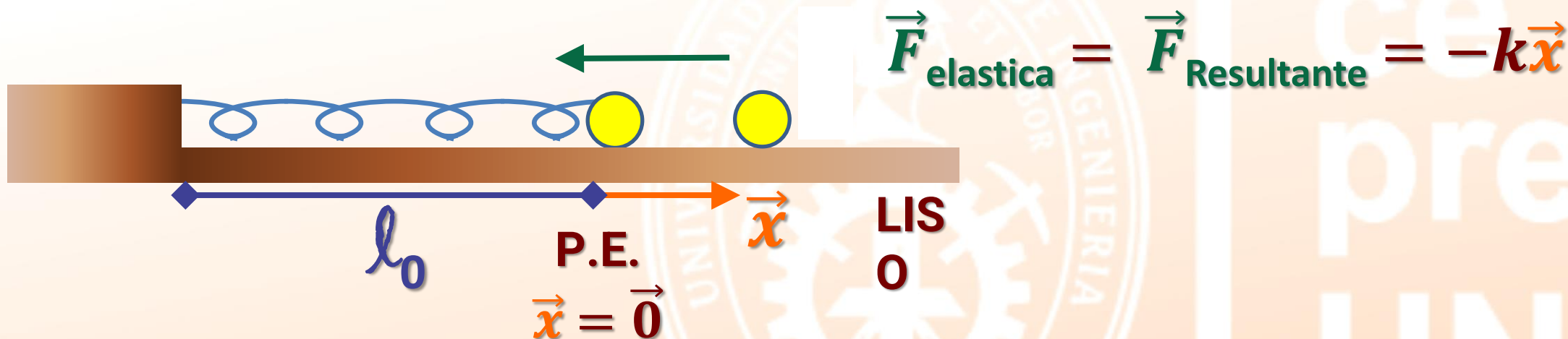


Esto nos dice que mientras el cuerpo este a mayor distancia de la posición de equilibrio, la fuerza resultante tendrá mayor módulo y siempre apunta hacia la posición de equilibrio.

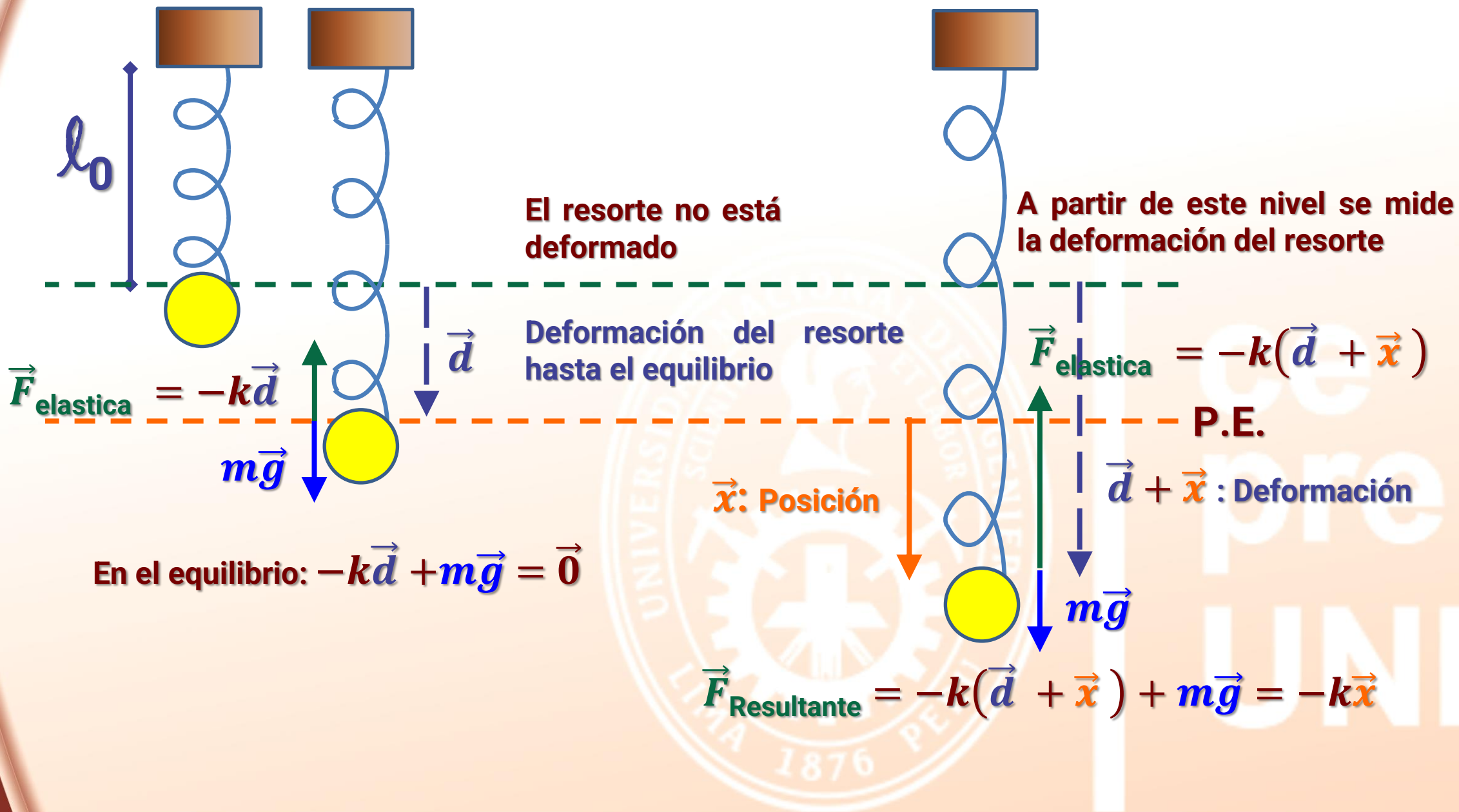
- Analicemos el caso de un sistema masa-resorte ubicado en un plano horizontal, este plano debe ser liso para que en cada oscilación recorra **4A**

En la posición de equilibrio, todas las fuerzas se anulan entre sí. En este caso el peso y la fuerza de contacto se anulan entre sí. Y no podría haber fuerza elástica pues no hay otro cuerpo que la anule.

Por lo tanto, la P.E. coincide con la ubicación del extremo del resorte unido al cuerpo cuando el resorte está en su longitud natural.



$\vec{x}$: Posición medida desde la P.E. coincide con la deformación del resorte.



4. Es un movimiento periódico

Cada oscilación se realiza un tiempo llamado periodo (T)

El periodo es el menor intervalo de tiempo donde la posición, velocidad y aceleración del cuerpo vuelven a ser las mismas.

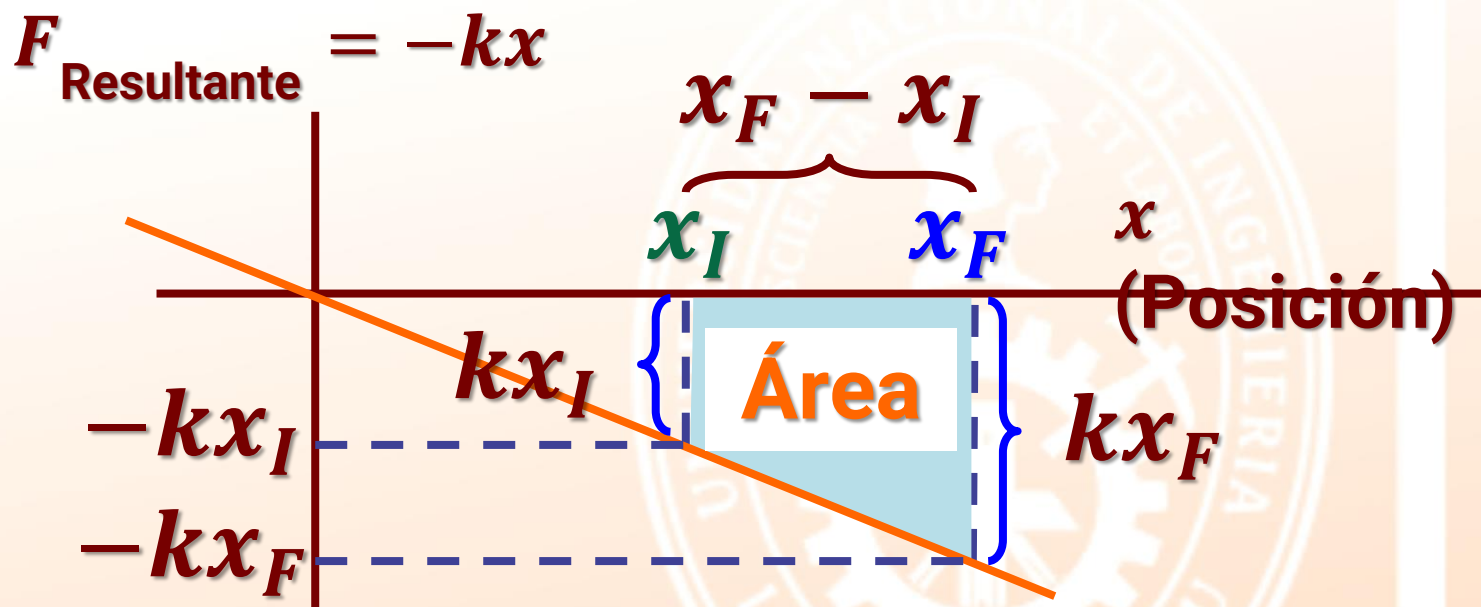
Si $\vec{F}_{\text{resultante}} = -k\vec{x}$ se observa
que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Para el sistema masa-resorte el periodo depende de la masa oscilante y la constante elástica del resorte.

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

$$W^{\text{Neto}} = W^F_{\text{Resultante}} = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_I^2$$



$$W^F_{\text{Resultante}} = - \text{Área} = \frac{1}{2} k x_I^2 - \frac{1}{2} k x_F^2$$

Del cálculo del trabajo de la fuerza resultante tenemos que

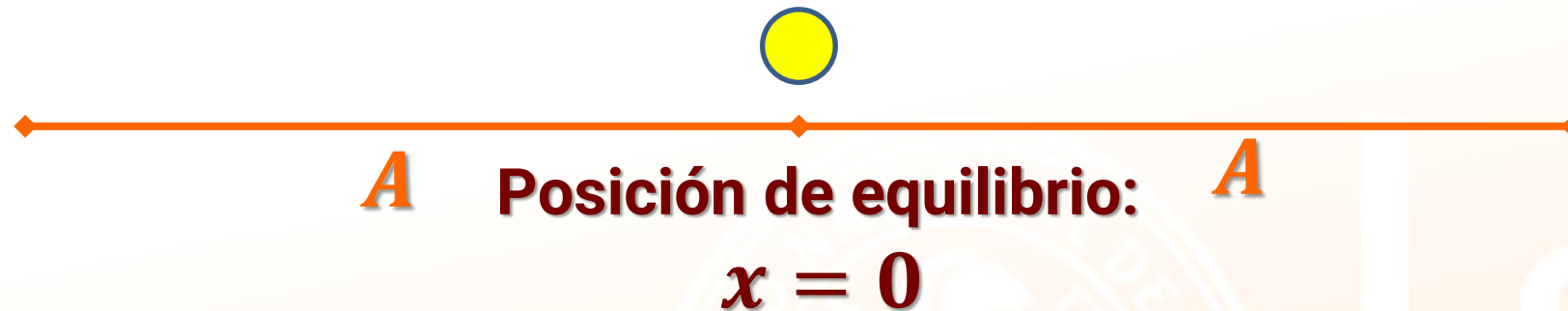
$$\frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2 = \frac{1}{2}kx_I^2 - \frac{1}{2}kx_F^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_F^2}_{E_{k_F}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_F^2}_{U_F} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_I^2}_{E_{k_I}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_I^2}_{U_I}$$

Entonces $E_{M_I} = E_{M_F}$, es decir la energía mecánica es constante en todo tiempo y en toda posición.

Analizaremos la energía cinética, potencial y mecánica en cada posición

Si se suelta desde esta posición al cuerpo, la distancia desde ese punto hacia la P.E. sería la amplitud, la cual es la posición de módulo máximo.



$$U_{\text{Potencial}} = U = \frac{1}{2} k x^2 \quad U_{\text{max}} = \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Pero cuando $x_{\text{max}} = A$ la velocidad es cero

$$\text{Así cuando } U_{\text{max}}, E_k = 0 \Rightarrow E_M = E_k + U = \frac{1}{2} k A^2$$

Cuando pasa por la posición de $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$
equilibrio

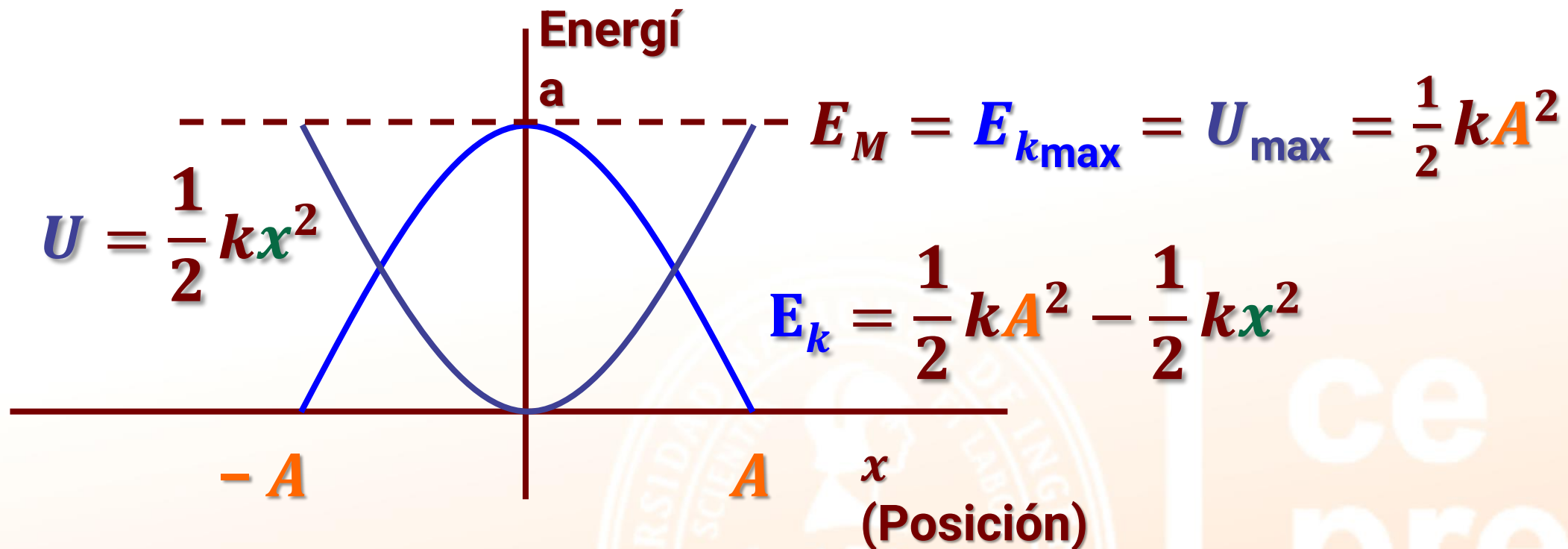
por lo que toda la energía mecánica se transforma en energía
cinética

asi cuando, $U = 0$, $E_{k \max} = \frac{1}{2}kA^2$

$$E_M = U_{\max} = E_{k \max} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = E_M - U = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$



En toda posición $E_M = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2$

De aquí despejamos la rapidez $v = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A$

CINEMÁTICA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

A partir de la $E_M = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 =$ dividiendo entre $\frac{1}{2} kA^2$

$$\frac{1}{2} k \left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{\frac{k}{m}} A} \right)^2 = 1$$

La posición x varía entre $-A$ y A

La velocidad v varía entre $-\sqrt{\frac{k}{m}} A$ y $\sqrt{\frac{k}{m}} A$

Además la posición y velocidad varían en forma periódica

Proponemos
solución

la

siguiente

$$x = A \text{ Sen}(ct) \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}} A \text{ Cos}(ct)$$

Luego de un periodo T , la posición x es la misma

$$x = A \text{Sen}(ct) = A \text{Sen}[c(t + T)] = A \text{Sen}[ct + \underbrace{cT}]$$

Como el periodo es el menor intervalo de tiempo donde la posición vuelve a ser la misma. Por trigonometría el menor ángulo donde el seno toma el mismo valor es 2π .

Por lo tanto $cT = 2\pi \Rightarrow c = \frac{2\pi}{T}$

A esto se denomina frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Como $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Reemplazando $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en las ecuaciones de posición y velocidad:

$$x = A \text{Sen}(\omega t) \qquad v = \omega A \text{Cos}(\omega t)$$

Pero no siempre en $t = 0$, $x = 0$. Debido a ello:

$$x = A \text{Sen}(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega A \text{Cos}(\omega t + \phi)$$

Donde $\omega t + \phi$ se denomina fase, y ϕ la fase en $t = 0$ (fase inicial) la cual esta asociada con la posición y velocidad en $t = 0$.

El cambio de fase $\Delta\phi$ vendría dado $[(\omega t + \phi) - (\omega t + \phi)] = \omega \Delta t$ por lo que la frecuencia angular es la razón de cambio de la fase respecto del tiempo $\omega = \Delta\phi / \Delta t$.

Como $F_{\text{RESULTANTE}} = -kx = ma$ (2° Ley de Newton)

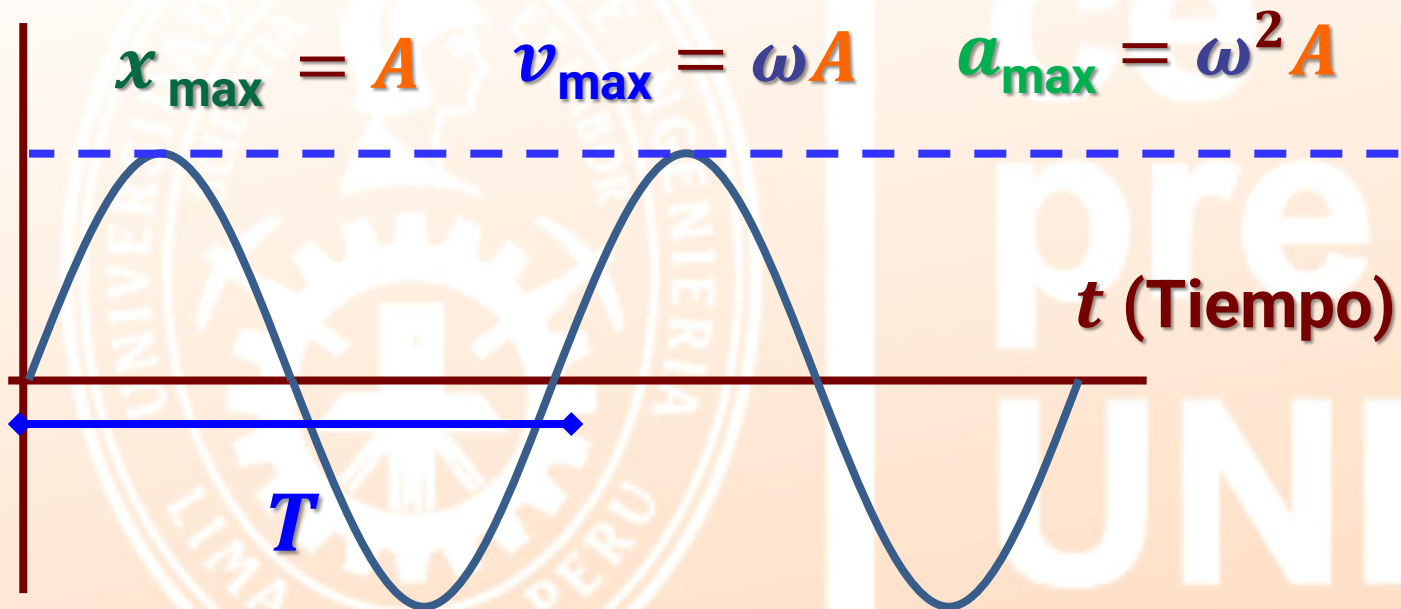
$$a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \Rightarrow a = -\omega^2 A \text{Sen}(\omega t + \phi)$$

Graficando la posición, velocidad y aceleración tenemos:

$$x = A \text{Sen}(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega A \text{Cos}(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 A \text{Sen}(\omega t + \phi)$$

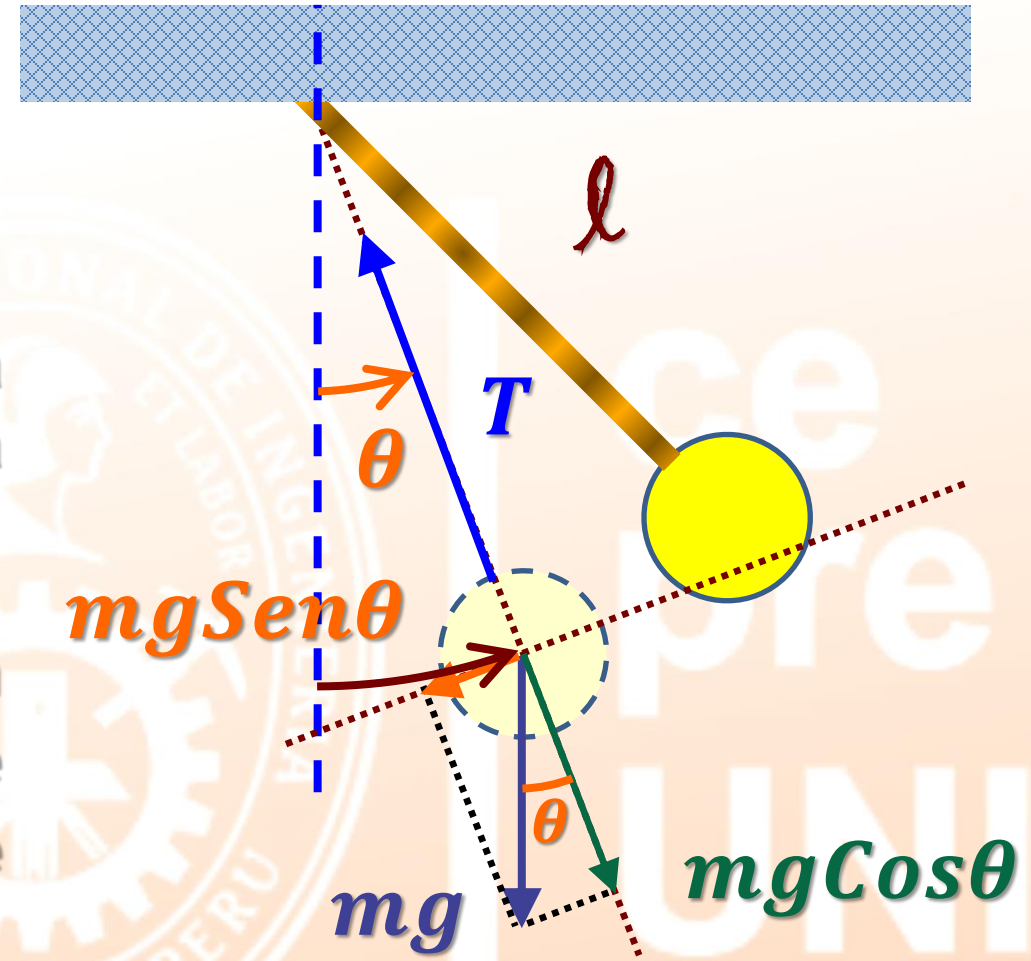


PÉNDULO SIMPLE

Se denomina péndulo al sistema formado por una masa sujeta a una cuerda que oscila por acción de la gravedad

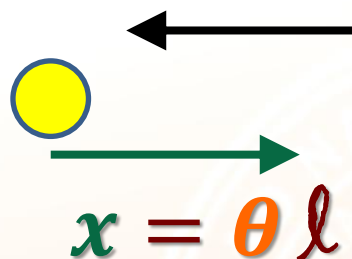
La fuerza que obliga a pasar a la masa por su posición de equilibrio es la componente tangencial del peso.

El arco trazado desde la P.E. hacia un punto de la trayectoria es $s = \theta \ell$ donde θ se traza desde la posición de equilibrio



Cuando el máximo ángulo que forma la cuerda con la vertical es menor de 15° , el movimiento del péndulo se aproxima a un movimiento armónico simple.

$$F = -mg \text{Sen} \theta \approx -mg \theta = -\frac{mg}{l} x$$



La posición se aproxima a la longitud de arco

La frecuencia angular para el péndulo simple es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{mg}{l}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

En el caso del péndulo simple, el período depende de la aceleración debida a la gravedad y de la longitud de la cuerda.

$x_{\max} = A = \theta_{\max} \ell$, donde $\theta_{\max}$ es la amplitud angular

en $x = A \text{ Sen}(\omega t + \phi)$ si se divide entre ℓ

$$\theta = \theta_{\max} \text{ Sen}(\omega t + \phi)$$

El movimiento pendular tiene por trayectoria un arco de circunferencia, por ello la velocidad angular $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \Omega = \frac{\text{Velocidad}}{\text{Radio}} = \frac{v}{\ell}$

$$\frac{v}{\ell} = \Omega = \omega \theta_{\max} \text{ Cos}(\omega t + \phi)$$

Y la aceleración angular $\alpha = -\omega^2 \theta_{\max} \text{ Sen}(\omega t + \phi)$